

Parallelschwingkreise in der NMR-Spektroskopie

In der NMR-Spektroskopie wurden Schwingkreise (Parallelschwingkreise) mit einer Spule und einem Kondensator für Resonanzexperimente genutzt. Mit den Arbeiten von Bloch und Purcell, die sich sehr einfacher Schwingkreise bedienten, konnte die kernmagnetische Resonanz von Wasserstoff nachgewiesen werden. Mit besseren NMR-Spektrometern konnten dann die Strukturen von komplizierten organischen Molekülen aufgeklärt werden.

Moderne Lehrbücher zur NMR-Spektroskopie behandeln heute kaum die elektronischen Grundlagen dieser älteren Methode.

Neben dem Parallelschwingkreis wird eine abgegliche Brückenschaltung benötigt. Bevor die Substanzprobe in die Spule einer Brückenschaltung gebracht wird, muß der Schwingkreis abgeglichen sein. Ein starker Magnet kann nun die Atomkerne (z.B. Wasserstoffkerne) in der Substanzprobe durch Einfluß der Spulenfrequenz (einer ganz bestimmten Frequenz je nach Stärke des Magnetfeldes) zur Energieaufnahme verleiten. Dabei wird die abgegliche Brückenschaltung verstimmt, diese Verstimmung ist mit einem Oszilloskop sichtbar.

Im folgenden Abschnitt werden zunächst abgegliche Schwingkreise unter der Zuhilfenahme eines Simulationsprogrammes erzeugt.

Benötigte Geräte, Materialien für theoretische Überlegung:

- 1) Das Buch **PC-Elektronik Labor** von Herbert Bernstein, Franzis Verlag Poing mit der beiliegenden CD Electronics Workbench
- 2) 1 Computer (Laptop)
- 3) Eventuell entsprechende Elektronische Bauteile von Conrad

1. Kurze Einführung in wichtige Grundlagen der Elektronik

Zur Bestimmung von Stromstärke oder Spannung ist das Ohmsche Gesetz äußerst wichtig.

Das Ohmsche Gesetz ist gegeben durch:

$$U/I = R \text{ oder auch } U=R*I$$

Dabei sind

die Spannung U (Volt, V) = $(m^2*kg*s^{-3}*A^{-1})$,

die Stromstärke I (Ampere, A)

der Widerstand R (Ohm, Ω) = $(m^2*kg*s^{-3}*A^{-2})$.

Die elektrische Leistung ist gegeben durch $P= U*I=R*I^2$ (Einheit: Joule, J)

Werden Widerstände in Serie geschaltet, so werden die Widerstände addiert:

$$R_{\text{Gesamt}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

Bei Parallel geschalteten Widerständen erhält man den Gesamtwiderstand durch Addition der Kehrwerte, also

$$1/R_{\text{Gesamt}} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + \dots$$

$$\text{oder } R_{\text{Gesamt}} = 1/(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + \dots)$$

Für die Berechnung von Strömen, Spannungen in komplexen Schaltkreisen müssen die

Kirchhoffschen Gesetze angewendet werden.

1. Die Summe aller Ströme an jedem Knotenpunkt eines Netzes ist null.
2. Die Summe aller Potentialabfälle längs eines geschlossenen Weges in einem Netz ist null.

Wichtige Bauteile in elektrischen Schaltungen sind neben Widerständen noch Kondensatoren und Spulen.

Im Wechselstrom verhalten sich Kondensatoren oder Spulen wie frequenzabhängige Widerstände.

Kondensatoren im Wechselstrom

Kondensatoren können kurzzeitig Ladungen aufnehmen und auch wieder abgeben.

Das allgemeine Zeichen für einen Kondensator ist C, die Einheit ist das Farad (F) = $m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Der Kehrwert der Kondensatorkapazität ($m^2 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-4} \cdot A^{-2}$) multipliziert mit dem Kehrwert der Frequenz (s^{-1}) hat die Dimension eines Widerstandes.

Für komplexe Berechnungen ist es sinnvoll, im Computerprogramm nur mit Volt, Ampere und Ohm, Farad, Henry derart zu rechnen, dass man in ein Kalkulationsprogramm nur die Zahlenwerte in den Dimensionen Farad, Volt, Ampere einträgt (also statt 2 pF nur 0,000000000002, oder statt 1 k Ω nur 1000) und entsprechend der korrekten Formel auch die entsprechend richtigen Dimensionsangaben (nach dem MKSA-System) im Ergebnis erhält.

Abkürzungen:

m= Milli ($10^{-3} = 0,001$)

μ = Mikro ($10^{-6} = 0,000001$)

n= Nano ($10^{-9} = 0,000000001$)

p= Piko ($10^{-12} = 0,000000000001$)

k = Kilo ($10^{+3} = 1000$)

M= Mega ($10^{+6} = 1000000$)

Im Wechselstromkreis verhält sich ein Kondensator wie ein Widerstand, der bei höheren Frequenzen immer geringer wird.

Für einen Kondensator gilt nach dem Ohmschen Gesetz:

$$V_0 = (1/(\omega \cdot C)) \cdot I_0 \quad \text{oder} \quad V_0 = (1/(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot C)) \cdot I_0 \quad // \quad X_C = (1/(\omega \cdot C)) = (1/(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot C)) \quad (1)$$

ω ist die Winkelgeschwindigkeit (Dimension: s^{-1}). Diese muß zur Bestimmung einer Frequenz (ν , Dimension: s^{-1}) immer umgerechnet werden durch Multiplikation mit $2 \cdot 3,14$ (π).

Zur Berechnung des Widerstandes eines Wechselstromes genügt die Kenntnis der richtig abgeleiteten Formel um aus einer Schwingungsfrequenz von 10 MHz den Widerstand eines Kondensators mit 2pF zu berechnen.

Der Widerstand $X_C = (1/(\omega \cdot C)) = (1/(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot C))$ im Wechselstrom ist also:
 $1/(2 \cdot 3,14 \cdot 10000000 \cdot 0,000000000002) = 7962 \quad \Omega$.

Durch einen Kondensator eilt der Strom der Spannung um $\pi/2$ voraus.

Die Stromstärke ist gegeben durch $I = \omega \cdot C \cdot V \cdot \sin(\omega \cdot t + \pi/2)$.

Durch die Phasenunterschied kann sich die Leistung ändern.

Ohne Kondensator und Spule - also ohne Phasenunterschied zwischen Strom und Spannung - haben Strom und Spannung im Wechselstrom entsprechend einer Sinusschwingung immer entweder positive oder negative Werte und gehen immer zusammen durch den Nullpunkt. Ist kein Kondensator und keine Spule im Wechselstromkreis, kann die Leistung nie negativ werden.

$$(+U) \cdot (+I) = U \cdot I$$

$$(-U) \cdot (-I) = U \cdot I$$

Bei einer Phasenverschiebung durch Kondensator (oder Spule) sind jedoch auch negative Leistungswerte möglich.

$$\text{Also } (+U) \cdot (-I) = -U \cdot I$$

$$\text{oder } (-U) \cdot (+I) = -U \cdot I.$$

Diese sogenannte Blindleistung wird nicht verbraucht (Speicherung von Energie in Spule oder Kondensator), sie pendelt nur hin und her.

Zur Berechnung von Phasenverschiebungen und den resultierenden Strom- und Spannungvektoren wird häufig der Lehrsatzes des Pythagoras (Hypothenusenquadrat = Gegenkathetenquadrat + Ankathetenquadrat) benötigt. Zur Berechnung des resultierenden Spannungsvektors in Reihenschaltungen oder des resultierenden Stromvektors in Parallelschaltungen wird der Gebrauch von komplexen Zahlen nötig.

Hierbei wird es erforderlich auch mit komplexen Zahlenwerten (j) zu rechnen, weil die Wurzel aus einer negativen Zahl nur durch diese Zahlenebene abgebildet wird.

Statt $1/(\omega \cdot C)$ schreibt man daher häufig: $1/(j \cdot \omega \cdot C)$.

Es gilt: $j \cdot j = -1$.

Für den Widerstand am Kondensator kann man folglich (nach Multiplikation von Zähler und Nenner mit j) auch $(-j/(\omega \cdot C))$ schreiben.

Diese Rechnungen werden wichtig, wenn man an der Phasenversetzung im Wechselstromkreis interessiert ist.

Spule im Wechselstrom

Die Dimension einer Spule ist das Henry (H), (Dimension: $m^2 \cdot kg^1 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$).

Die Physiker Joseph Henry und Michael Faraday entdeckten im Jahr 1830 unabhängig voneinander die magnetische Induktion.

Eine Spule wandelt kurzzeitig elektrische Energie in magnetische Energie um. Die induzierte Spannung ist der Stromänderung entgegengerichtet. Bei wachsenden Strom wächst die selbstinduzierte Spannung negativ an, bei abnehmenden Strom wird die induzierte Spannung positiv.

Eine Spule verhält sich im Wechselstrom wie ein Widerstand.

Multipliziert man das Henry mit der Frequenz erhält man die Dimension eines Widerstandes.

Der Strom durch eine Spule im Wechselstromkreis hinkt der Spannung um $\pi/2$ hinterher.

Der Widerstand einer Spule im Wechselstrom ergibt sich aus der Beziehung:

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot 3,14 \cdot \nu \cdot L \quad (2)$$

(Genauer: $j \cdot \omega \cdot L$)

Je höher die Frequenz, desto höher der Widerstand der Spule.

Eine Spule mit $1 \mu H$ hat bei einem Wechselstrom von 10 MHz einen Widerstand von:

$$\text{Widerstand Spule} : 2 \cdot 3,14 \cdot 10000000 \cdot 0,000001 = 62,8 \Omega.$$

Die Induktivität einer Luftspule lässt sich aus der Beziehung¹⁾ (S. 191):

$$L = \mu_0 \cdot N^2 \cdot D^2 / l \quad (3)$$

berechnen.

L = Induktivität in Henry (H)

$$\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$$

N = Windungszahl (Dimensionsloser Zahlenwert)

D = Windungsdurchmesser in Meter (m)

l = Spulenlänge (Länge der Spulenwicklung in Meter)

Bei einer Luftspule sollen alle Windungen dicht an dicht (ohne Zwischenraum) liegen, so dass der Abstand aller Windungen untereinander gleich ist. Schlecht gewickelte Spulen zeigen Abweichungen zur theoretischen Induktivität oder können sich partiell wie Kondensatoren verhalten.

Eine Luftspule kann leicht erzeugt werden indem man etwas Draht gleichmäßig um ein dünnes Reagenzglas wickelt. Bei Bedarf ist der Zusammenhalt der gewickelten Drähte zu stabilisieren (z.B. durch eine Anbringen zweier Korkstopfen (-Stücken) oben und unten beim Reagenzglas, so dass eine Rinne entsteht, an der man die Spule aufwickeln kann.

Testung von realen Kondensatoren und Spulen

Viele Kondensatoren weisen durch die Herstellungsverfahren eine gewisse Schwankungsbreite in der angegebenen Kapazität auf. Für Keramikkondensatoren kann die Schwankungsbreite bis zu 20% des vom Hersteller angegebenen Wertes betragen. Um keine Überraschungen – abweichend von den Berechnungen – zu erleben, empfiehlt sich die Kondensatoren vorab zu überprüfen. Überprüfungen der käuflichen Kondensatoren können nach dem 1. Teil Abschnitt 3.3.8 *Reihenschaltungen von Kondensator und Widerstand* des Buches PC-Elektronik Labor vorgenommen werden.

Die Spannungsmessung kann mit einem Voltmeter, Einstellung AC (für Wechselstrom), vorgenommen werden. Für Kondensatoren im Pico-Farad-Bereich benötigt man recht hohe Widerstände ($M \Omega$), damit die Messungen brauchbar werden.

Auch Spulen sind zu prüfen (nach Teil 1. Abschnitt 5.2.7 des genannten Buches) bevor sie in eine Schaltung eingebaut werden.

Parallelschwingkreis

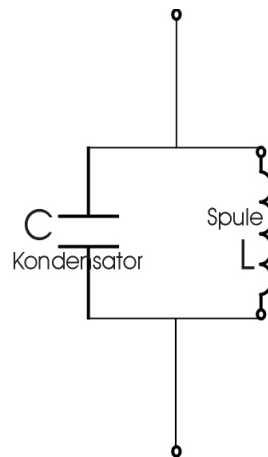


Abbildung 1: Parallelschwingkreis

In einem Parallelschwingkreis sind Kondensator und Spule in Serie angeordnet.

Zur Berechnung des Gesamtwiderstandes (Z) im Wechselstrom müssen die Kehrwerte der Widerstände addiert werden.

Setzt man die Kehrwerte der Widerstände entsprechend den Kirchhoffschen Gesetzen an, so gilt:

$$1/Z = 1/j\omega L + j\omega C \quad (4)$$

$$\text{oder } Z = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 L C}$$

$$\text{Bei Resonanzfrequenz } \nu = 1/(2\pi\sqrt{L C}) \quad (5)$$

wird der Widerstand im Schwingkreis unendlich groß. Die Ströme I_C und I_L sind dabei entgegengerichtet und ergeben summiert null. Je höher die Stromverhältnisse I_C / I_{ges} und I_L / I_{ges} beim

Resonanzpunkt desto höher die Güte Q des Parallelschwingkreises.
 Es gilt auch $Q = I_c / I_{ges} = I_L / I_{ges} = R / (\omega_{res} * L) = R * \omega_{res} * C = R * (C/L)^{0.5}$. (6)

Für den Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung ergibt sich:
 $\tan(\varphi) = R * (\omega * C - (1/\omega * L))$.

Brückenschaltung für Kernresonanzexperimente

Eine früher gebrauchte Brückenschaltung für Kernresonanzexperimente war die asymmetrische Brückenschaltung von H. L. Anderson.²⁾

Abbildung 2: Brückenschaltung nach Anderson

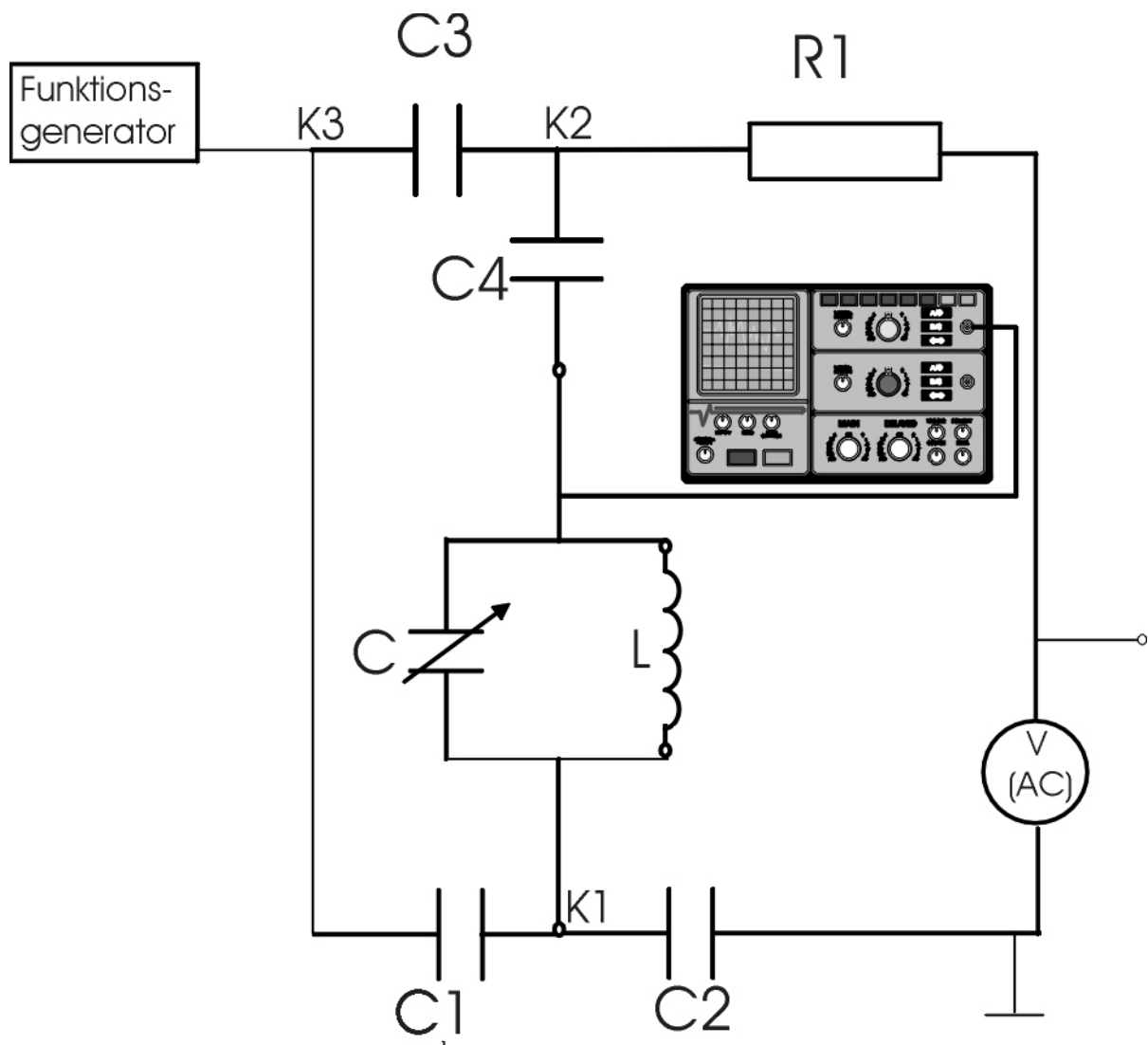
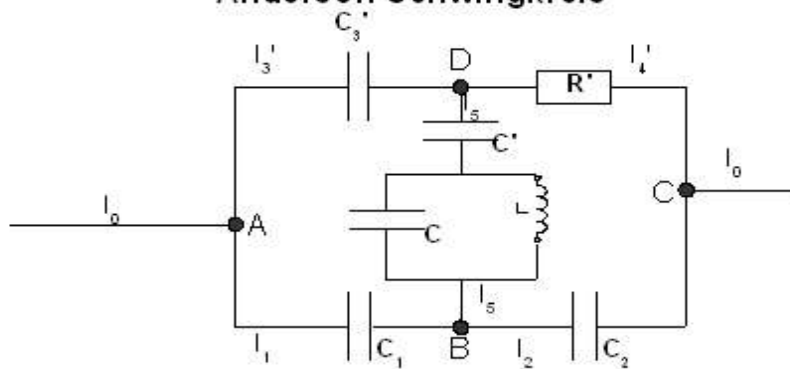


Abbildung II a:
Anderson Schwingkreis



A, B, C, D: Stromverzweigungspunkte
 $I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$: Stromstärke des Leitungsteils
 C_1, C_2, C_3', C' : Kondensatoren
 R' : Widerstand, L : Spule

Durch Anwendung des 1. Kirchhoffschen Gesetz gilt:

a) Für den Strom sind in jedem Knotenpunkt eingehende und ausgehende Ströme null.

Für Punkt A: $-I_0 + I_1 + I_3' = 0$,

für Punkt B: $-I_1 + I_2 + I_5 = 0$,

für Punkt C: $-I_2 - I_4' + I_0 = 0$,

für Punkt D: $-I_3' - I_5 + I_4' = 0$.

b) In jeder geschlossenen Wegstrecke ist die Summe aller Potentialabfälle gleich null.

$I_3' \cdot (1/(i \cdot \omega \cdot C_3')) - I_5 \cdot ((\omega^2 \cdot L^2 / (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C))^2 + (-1/(\omega^2 \cdot C'^2))^{0,5}) - I_1 \cdot (1/(i \cdot \omega \cdot C_1)) = 0$.

Analoges lässt sich für den Weg der Strecke D-C-B formulieren:

$I_4' \cdot R' - I_2 \cdot (1/(i \cdot \omega \cdot C_2)) + I_5 \cdot ((\omega^2 \cdot L^2 / (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C))^2 + (-1/(\omega^2 \cdot C'^2))^{0,5})$.

Kürzt man den Term mit I_5 durch Zusammenfassung der Gleichungen heraus, erhält man:

$I_3' \cdot (1/(i \cdot \omega \cdot C_3')) + I_4' \cdot R' - I_2 \cdot (1/(i \cdot \omega \cdot C_2)) - I_1 \cdot (1/(i \cdot \omega \cdot C_1)) = 0$.

Setzt man nach Knotenpunkt A: $I_3' = I_0 - I_1$ und Knotenpunkt C: $I_4' = I_0 - I_2$, lassen sich die Stromstärken I_3' und I_4' wegekürzen.

Im Brückenteil muss der Widerstand des Kondensator C' additiv mit dem Widerstand des Parallelschwingkreises verknüpft werden. In einer Parallelschaltung haben zwei Widerstände R_1 und R_2 bekanntlich den Gesamtwiderstand $1/R = 1/(R_1) + 1/(R_2) = (R_2 + R_1)/(R_1 \cdot R_2)$ und $R = R_1 \cdot R_2 / (R_2 + R_1)$.

Für den Scheinwiderstand aus Kondensator und Spule ergibt sich:

$1/R = 1/(1/(i \cdot \omega \cdot C) + 1/(i \cdot \omega \cdot L)) = i \cdot \omega \cdot C + 1/(i \cdot \omega \cdot L)$, durch Multiplikation des ersten Terms mit $(i \cdot \omega \cdot L)/(i \cdot \omega \cdot L)$ erhält man: $(-\omega^2 \cdot L \cdot C + 1)/(i \cdot \omega \cdot L)$, der Kehrwert ergibt:

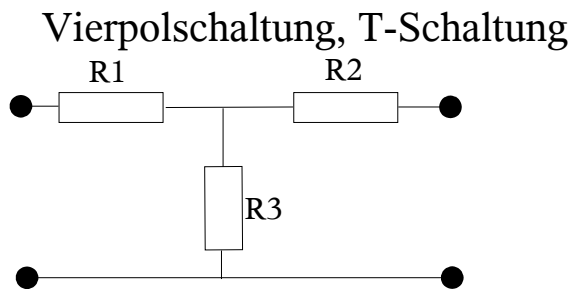
$R = (i \cdot \omega \cdot L)/(1 - \omega^2 \cdot L \cdot C)$ für den Scheinwiderstand der Parallelschaltung. Da der Scheinwiderstand von Kondensator und Spule jedoch nach dem Satz des Pythagoras sich aus der Wurzel der beiden quadrierten Widerstandsteile zusammensetzt, ergibt sich:

$|Z| = (\omega^2 \cdot L^2 / (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C)^2 + (1/(\omega^2 \cdot C'^2))^{0,5})$

Der Scheinwiderstand im Parallelschwingkreis wird unendlich groß, wenn $\omega = 1/(L \cdot C)^{0,5}$, da nun der Nenner null wird.

c) T-Schaltung

Eine T-Schaltung sieht wie folgt aus:



Eine T-Brücke wird zur Eliminierung einer definierten Frequenz eingesetzt.

Nach A. Lösche, *Kerninduktion*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin (1957), S.147 und Tuttle (Proceedings of I.R.E, S.23) – siehe auch Anhang 2 – Vierpol - gilt für den Widerstand zwischen den Zweigen einer solchen T-Schaltung:

$$R = R_1 + R_2 + R_1 \cdot R_2 / R_3 \quad (I)$$

Wendet man diese Beziehung auf den unteren Teil der Anderson-Brücke an, so kann man formulieren:

$$Z = (1/(i \cdot \omega \cdot C_1)) + (1/(i \cdot \omega \cdot C_2)) + ((1/(i \cdot \omega \cdot C_1)) * (1/(i \cdot \omega \cdot C_2))) / (\omega \cdot L / (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C)). \quad (II)$$

Falls die Brücke der Vierpolschaltung nahezu null wird, nimmt die Spannung nach $U = R \cdot I$ ebenfalls sehr geringe Werte an.

Multipliziert man die Gleichung II mit $i \cdot \omega \cdot C_1 \cdot C_2$ erhält man:

$$0 = C_2 + C_1 - (i/\omega) / (\omega \cdot L / (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C)) = C_2 + C_1 - i / (\omega^2 \cdot L / (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C)) = C_2 + C_1 - (1 - \omega^2 \cdot L \cdot C) / (\omega^2 \cdot L) \text{ oder } C_2 + C_1 - 1/(\omega^2 \cdot L) + C \text{ bzw. } 1/(\omega^2 \cdot L) = C_2 + C_1 + C. \quad (III)$$

(Möglicherweise liegt bei meiner Rechnung ein Fehler vor, da nach Tuttle (s. u.) die Beziehung: $C + C_1 + C_2 \cdot (1 + (C_1/C_3)) = 1/(\omega^2 \cdot L)$ (IV) gilt.

Die Korrektur ist möglicherweise nach der Beziehung von Tuttle nachvollziehbar.

Auch für den oberen Brückenkreis muss die Beziehung I gelten.

Stellt man die Gleichung analog wie für den unteren T-Kreis zusammen, erhält man:

$$Z = 0 = (1/(i \cdot \omega \cdot C_3')) + R' + ((1/(i \cdot \omega \cdot C_3')) \cdot R') / (1/(i \cdot \omega \cdot C')) = (1/(i \cdot \omega \cdot C_3')) + R' + (R' \cdot C' / C_3') = (1/(i \cdot \omega \cdot C_3')) + R' \cdot (1 + (C' / C_3')) = Z.$$

Dies ist genau die Beziehung, die Tuttle (W. N. Tuttle, Proceedings of I.R.E, Jan. 1940, S. 23 ff.) abgeleitet hatte. Eine T-Brücke konnte nach der Beziehung von Tuttle in einen Widerstand aus Kondensator und einen Widerstand überführt werden. Da der Widerstand des zweiten Stromkreises (mit I_4') durch die Kondensatoren um einen konstanten Faktor erhöht wurde, müsste die Erhöhung ebenfalls für den unteren T-Kreis (mit I_2) gelten, damit die Brücke abgeglichen ist. Also schreibt man statt C_2 folglich $C_2 \cdot (1 + (C' / C_3'))$.

Für die untere T-Brücke ergibt sich dadurch die Beziehung:

$$1/(\omega^2 \cdot L) = C_2 \cdot (1 + (C' / C_3')) + C_1 + C. \quad (V)$$

Betrachtet man die Stromlosigkeit der Brücke nach den Kriterien der Wheatstone-Brücke, so muss das Verhältnis der vorderen Widerstände der Brücke gleich den hinteren Widerständen der Brücke

sein. Da durch die Zusammenschaltung mit den anderen Brückengliedern durch die Kriterien der Stromlosigkeit des Vierpols der hintere Widerstand eine andere Gestalt bekommt, so muss dies auch bei der Aufstellung der Wheatstone-Bedingungen beachtet werden.

Für den oberen Brückenteil schreibt man daher:

$$(1/(i*\omega*C3')) / R'(1+(C'/C3'))$$

Für den unteren Brückenteil übernimmt man die Bedingung II entsprechend der Abgleichung des Vierpols aus:

$$Z = (1/i*\omega*C_1) + (1/i*\omega*C_2) + (-1/(\omega^2*C_1*C_2))*(1/R_p).$$

Dabei entspricht R_p dem Widerstand des Parallelkreises aus Spule und Kondensator. Dieser ist gegeben durch die Beziehung: $R_p = (i*\omega*L)/(1-\omega^2*L*C)$.

Falls der Widerstand $(1/i*\omega*C_2)$ vernachlässigbar ist und obige Ableitungen korrekt sind, ergibt sich als Verhältnis nach Wheatstone:

$$(1/i*\omega*C_1) / (-1/\omega^2*C_1*C_2)*(1/R_p) = (1/(i*\omega*C3')) / R'(1+(C'/C3')) \text{ oder}$$

$$R_p * (-\omega^2*C_1*C_2) / (i*\omega*C_1) = (1/(i*\omega*C3')) / R'(1+(C'/C3')) \text{ oder}$$

$$R_p * (-\omega^2*C_2/i) * (i*\omega*C3') * R'(1+(C'/C3')) = 1$$

$$R_p * (-\omega^2*C_2*C3') * R'(1+(C'/C3')) = 1 \quad \text{(VI)}$$

Im Lehrbuch von E. R. Andrew, Nuclear Magnetic Resonance, Cambridge at the University Press, 1958, S. 48 müssen folgende Kriterien für den Brückenabgleich der Anderson-Brücke erfüllt sein:

$$1. \quad C + C_1 + C_2*(1+(C_1/C_3')) = 1/(\omega^2*L) \quad (7)$$

$$2. \quad \omega = 1/(L*C)^{0.5}$$

$$3. \quad \omega^2*C_1*C_2*(1+(C'/C_3'))*R'*R_L = 1 \quad (8)$$

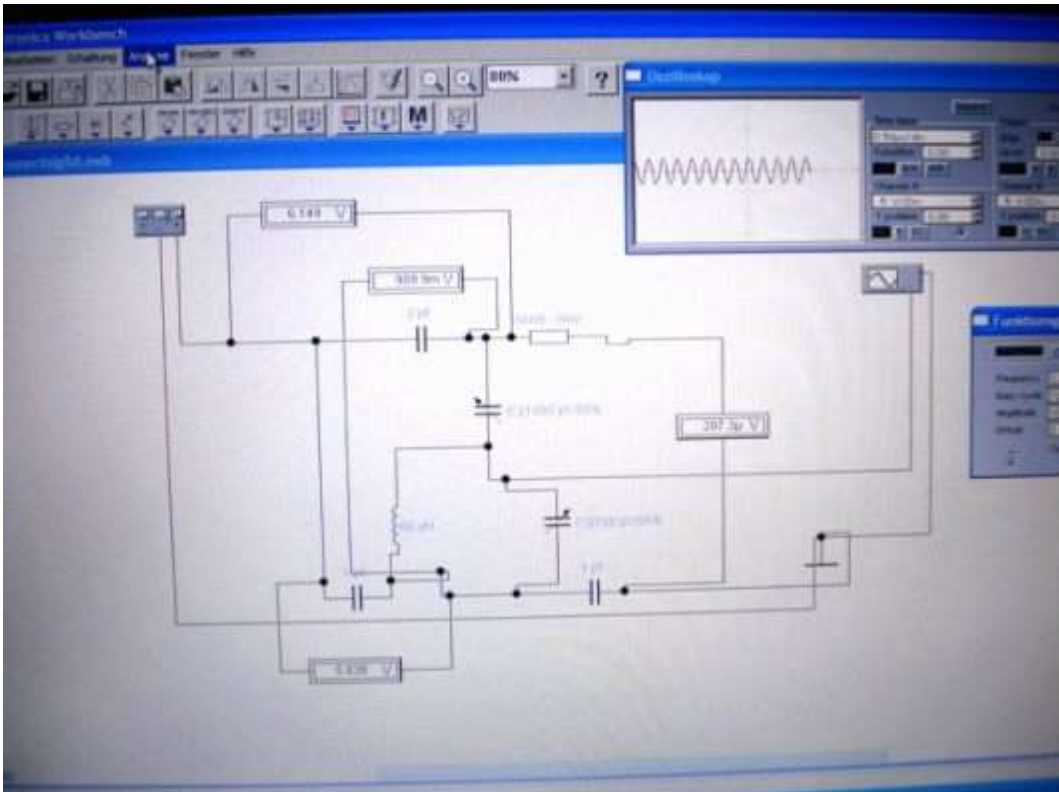
Die angegebenen Bedingungen stimmen mit leichten Abweichungen mit den eigenen Berechnungen überein.

Mit dem Drehkondensator C (und C4) kann die Abgleichung der Brückenschaltung erreicht werden. Sichtbar werden optimale Abgleichbedingungen, wenn im Oszilloskop nur noch eine waagerechte Linie erscheint und das Voltmeter an den Brückenausgängen einen minimalen Wert einnimmt.

Mit der Electronics Workbench aus dem PC-Elektronik-Labor wird die Schaltung entsprechend den obigen Vorgaben zusammengebaut.

Zwischen den Knoten K1 / K2 bzw. K3 / K1 und K3 / K2 können noch weitere Voltmeter angebracht werden. Es ist auch möglich z.B. ein Amperemeter zwischen Kondensator C4 und Parallelschwingkreis einzufügen, um die Stromstärke zu messen.

Bild 1: Schaltplan in der Electronics Workbench



Brückenschaltungen, bei der die Brücken entsprechend den Bedingungen von Tuttle erfüllt sind:

Frequenz(Hz)	C1 (pF)	C2 (pF)	C (pF)	C3' (pF)	C' (pF)	R (Ω)	L (μ H)
19000000	1	3	65	6	400	100	1
10100000	1	4	162	5	1000	3500	1,45
2100000	1	4	90	2	500	10000	60

Die Tabellenwerte wurden soweit mit der Electronics Workbench durchgetestet, so dass für diese Werte eine nahezu gerade Linie am Oszilloskop sichtbar ist und die Spannung zwischen den Brückenausgängen minimal wird (bei 19,0 MHz ist der Abgleich optimal, selbst bei Verstärkung bis 50 mV ist nur eine gerade Linie sichtbar).

Mit dem Funktionsgenerator der Workbench kann man probeweise eine leicht abgeänderte Frequenz eingeben und sehen was passiert. Im ersten Beispiel statt 19.0 MHz also 18.9 MHz oder 19.1 MHz.

Im Oszilloskop werden bei 18.9 und 19.1 MHz stärkere Schwingungen sichtbar. Auch die Spannung am Voltmeter an den Brückendenen steigt wieder an. Eine leichte Frequenzverstimmung kann somit zu sichtbaren Signaländerungen am Oszilloskop und am Voltmeter führen.

Bild 3: Brückenabgleich bei ca. 19.0 MHz

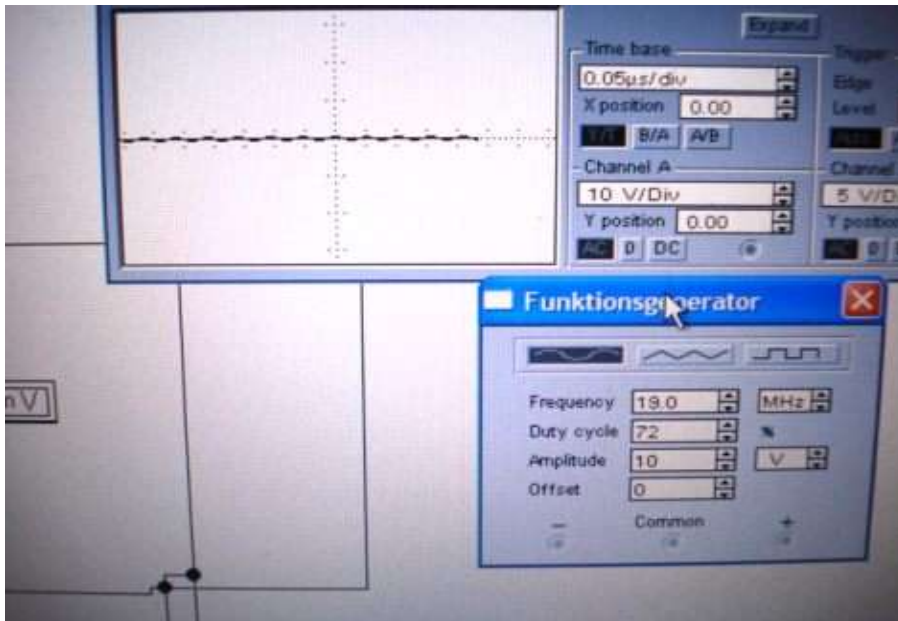


Bild 4: Mit 18.9 MHz

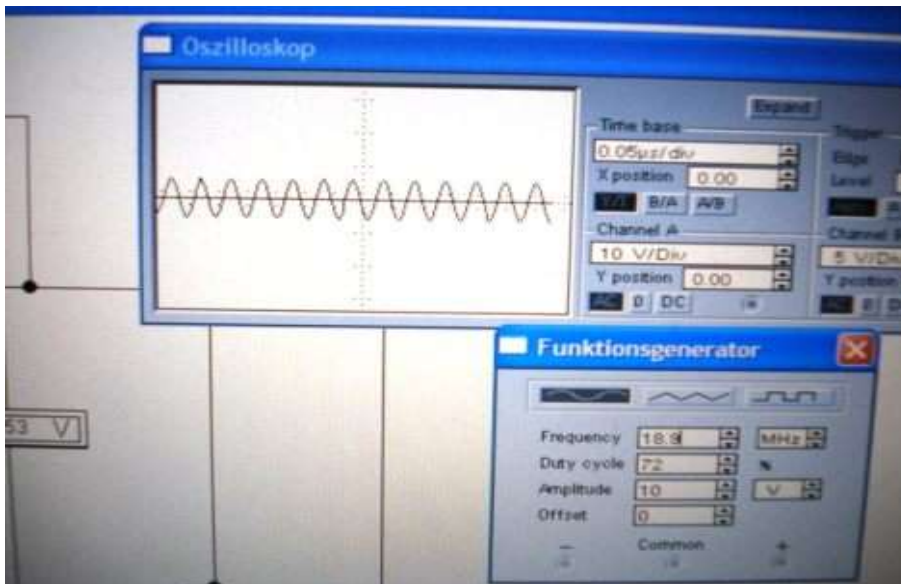
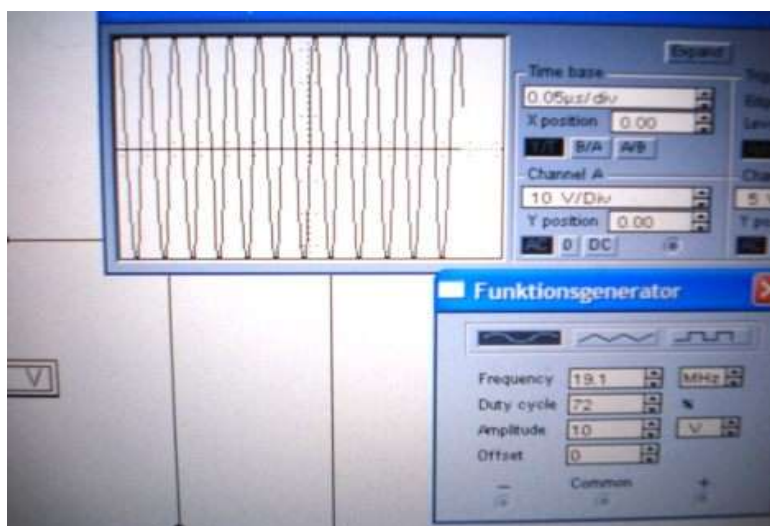


Bild 5: Mit 19.1 MHz



Für Beispiel 1 (19 MHz) wird gezeigt wie sich die Ergebnisse mit der Anderson-Brücke ermitteln lassen:

Zur Berechnung der sinnvollen Resonanzbedingungen erstellt man sich selbst eine Rechenvorschrift in Excel-Form, die mit den drei Bedingungen nach Tuttle in Übereinstimmung stehen.

Die erste Gleichung und die zweite Gleichung müssen gleiche Werte für die Winkelgeschwindigkeit ($\omega = 2 \cdot 3,14 \cdot \nu$) ergeben.

Die erste Formel wird nach ω^2 aufgelöst, dann die Wurzel gezogen und durch $2 \cdot \pi$ geteilt (entsprechend 1. Beispiel, 19 MHz) :

C	C1	C2	C3	L	$\omega \cdot \omega$	Winkelgesch (ω)	Frequenz (ν)
6,50E-11	1,00E-012	3,00E-012	6,00E-012	,00000100	1,44E+16	119.952.029	19.100.642

Die zweite Bedingung ist nahezu erfüllt (die Berechnung müßte weiter optimiert werden):

C	L	Frequenz (ν)
6,50E-11	,00000100	19.750.754

Die dritte Bedingung ist ebenfalls nahezu erfüllt:

$\omega \cdot \omega$	C1	C2	C4	C3	R1	R0	Ergebnis
1,44E+016	1,00E-12	3,00E-12	1,00E-08	6,00E-12	100	119,94	8,63E-01

Sind die drei Bedingungen nahezu erfüllt, kann man mit dem Drehkondensator C nachregeln. Mitunter ist es auch notwendig, mit Kondensator C4 die Abstimmung zu verfeinern.

Will man die Güte bei dieser Frequenz im Parallelkreis berechnen, so mißt man zunächst die Spannungsdifferenz zwischen dem Schwingkreis und die Stromstärke zwischen C4 und Schwingkreis.

Es ergibt sich:

$$U_{(\text{Schwingkreis})} = 12,85 \text{ V}$$

$$I_{(\text{gesamt})} = 0,005235 \text{ A}$$

$$U/I = R_{(\text{Schwingkreis})} = 12,85 \text{ V} / 0,005235 \text{ A} = 2455 \text{ } \Omega.$$

Die Güte ist somit:

$$Q = R \cdot ((C/L)^{0,5}) \rightarrow 2455 \cdot ((0,000000000065/0,000001)^{0,5}) = 2455 \cdot 0,00806 = 19,8$$

Die Stromstärken von I_L und I_C betragen damit etwa $19,8 \cdot 0,0052 = 0,104 \text{ A}$.

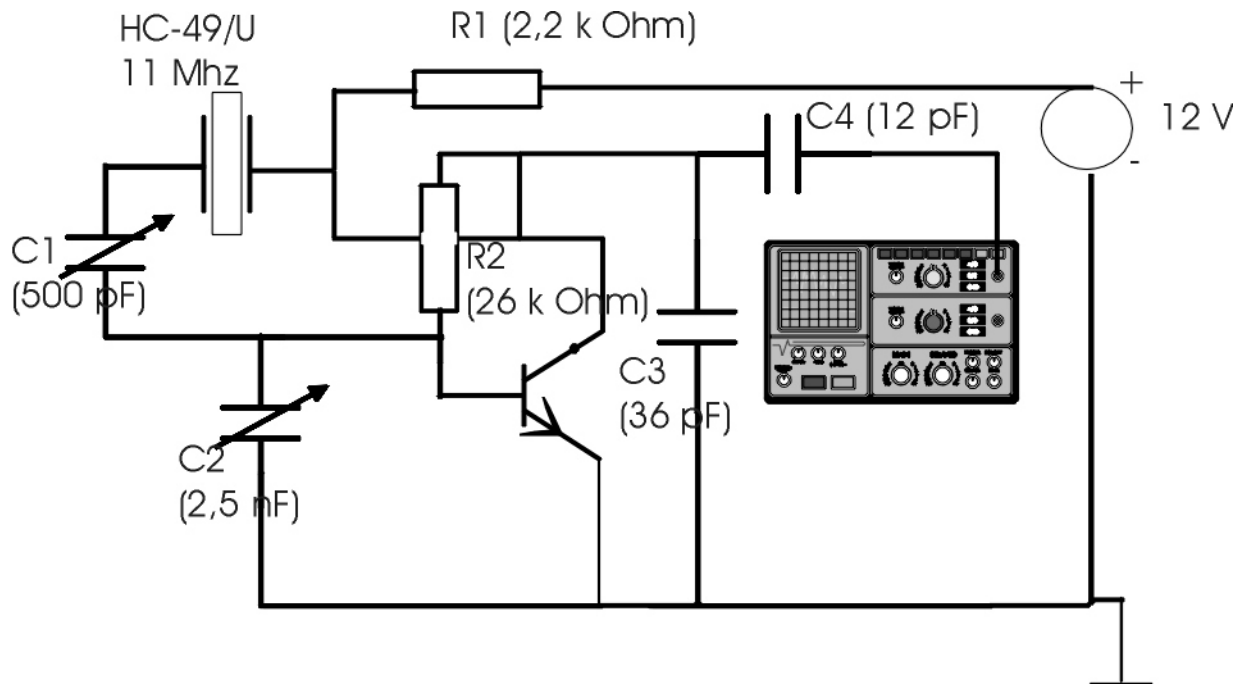
Mit eingefügten Spannungsmessgeräten in den Schaltplan der Workbench können auch die Kirchhoffschen Gesetze überprüft werden.

Funktionsgenerator und Oszillator

Funktionsgeneratoren über 4 MHz sind recht teuer. Für einfache Untersuchungen ist es auch möglich Schwingquarze zu verwenden. Schwingquarze sind sehr preiswert.

Der folgende Schaltkreis ist abgewandelt aus dem Buch *Professionelle Schaltungstechnik*, Band 5 & 6, Franzis Verlag Poing, 2003, S. 146 (Bd. 6) übernommen worden.

Ein Schaltbild für ein 11 MHz Oszillator sieht wie folgt aus:



Oszillator für 150 kHz bis 30 Mhz

Dabei sollte die addierten Kondensatorwerte von C1, C2 und C3 der kapazitiven Last des Quarzes entsprechen.

Mit R2 wird auf halbe Versorgungsspannung am Kollektor des Transistors eingestellt.

Die Kondensatoren sollten frequenzabhängig folgende Widerstände besitzen C3 ($X_C = 400 \Omega$), C4 ($X_C = 1200 \Omega$) und bei niedrigen Frequenzen C2 ($X_C = 200 \Omega$).

Mit C1 wird der Quarz dann optimal eingestellt.

Mit der Electronics Workbench kann der Quarz-Oszillator geprüft werden.

Im Oszilloskop sind nun Schwingungen sichtbar.

Ob die Frequenz korrekt ist, prüft man anhand der Länge einer Schwingungsdauer am Bildschirm des Oszilloskops. Die Achsenkalibrierung (Div) auf der x-Achse zeigt beispielsweise 1 Div pro Schwingung. Links oben im Oszilloskop ist die Zeitskala (Time base) angegeben. Sie ist beispielsweise auf $0,1 \mu\text{s}/\text{Div}$ eingestellt. Durch Multiplikation erhält man nun die Zeitdauer einer Schwingung: $1\text{Div} * 0,1 \mu\text{s}/\text{Div} = 0,1 \mu\text{s}$. Der Kehrwert der Zeitdauer einer Schwingung ist die Frequenz (s^{-1}), im Beispiel also $1/(0,1 \mu\text{s}) = 10 \text{ MHz}$.

Magnetfeld eines Dauermagneten

Da seit einigen Jahren Dauermagnete auf Basis von Neodym-Kupfer-Nickellegierungen relativ preiswert zugänglich sind, könnte man den Einsatz für Kern-Resonanzprüfungen testen. Jedoch sollte die verwendete Glasröhre oder das rechteckige Probegefäß (mit einer Rechteckspule?) mit Probesubstanz einen sehr geringen Durchmesser bzw. eine geringe Dicke besitzen, damit das Magnetfeld einheitlich ist.

In Wikipedia findet man unter dem Stichwort Magnete bei den Links eine Angabe zur Berechnung von magnetischen Flußdichten bei verschiedenen Abständen zum Magneten (und verschiedenen Magnetformen).

Die magnetische Flußdichte (B) (mitunter auch als Magnetfeld bezeichnet) wird in Tesla (Abkürzung T = kg*s⁻²*A⁻¹) angegeben.

Die Zugkraft eines Permanentmagneten berechnet sich aus¹⁾ (S. 190):

$$F = \frac{B^2 \cdot A}{2 \cdot \mu_0} \quad (9)$$

F = Kraft eines Magnetfeldes (z.B. Gewichthebekraft N=kg*m*s⁻²)

A = Fläche des Magneten in Quadratmeter

$\mu_0 = 1,257 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$ (Magnetische Feldkonstante)

Umgeformt kann man auch schreiben:

$$B^2 = \frac{F \cdot 2 \cdot \mu_0}{A} \quad \text{oder} \quad B = \left(\frac{F \cdot 2 \cdot \mu_0}{A} \right)^{0,5}$$

Auf dem Link bei Wikipedia findet man die Angabe, dass ein Neodymmagnet (Ni-Cu-Ni 35) mit einer Länge von 5 cm, einer Breite von 2 cm, einer Höhe von 0,5 cm ein Eisengewicht von 37 kg heben kann.

Die Gewichtskraft ist also: $F = 37 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 363 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Damit ist die magnetische Flußdichte ist: $B = \left(\frac{363 \cdot 2 \cdot 1,257 \cdot 10^{-6}}{(0,05 \cdot 0,02)} \right)^{0,5} = 0,96 \text{ Tesla}$.

Recht wertvoll ist auch die Abstandsberechnung der magnetischen Flußdichte des Herstellers.

Magnetische Flußdichte in Abhängigkeit vom Abstand des Magneten

<i>Abstand (mm)</i>	<i>Magnet. Flußdichte (mT)</i>
0,5	69,4
2	63,82
5	50,24
10	31,34
15	19,75
20	12,93
30	6,18
50	1,95
100	0,31
150	0,1
300	0,01

Firmen wie Conrad geben in ihrem Verkaufskatalog (Conrad Profession Elektronik und Technik 2008, S. 658) magnetische Flußdichten von Neodymmagneten bis 0,6 Tesla an. Diese Angabe bezieht sich direkt auf die Oberfläche. Mit der Entfernung sinkt die Flußdichte. Die Angaben des Herstellers erscheinen mir jedoch um eine Zehnerpotenz zu gering, statt 0,069 T für die Magnetflußdichte bei einem Abstand von 0,5 mm, sollte dort 0,69 T stehen. Falls alle Werte mit dem Faktor zehn multipliziert werden würden, wären die Werte nachvollziehbar.

Energetische Berechnung

Nach Max Planck kann Energie nicht in beliebigen Beträgen bei atomaren Teilchen aufgenommen oder abgegeben sondern nur in diskreten Energiequanten. Es gilt die Plancksche Beziehung:

$$\Delta E = h \cdot \nu \quad (10)$$

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$\nu = \text{Frequenz } \text{s}^{-1}$$

Für die NMR-Spektroskopie sind die Energiequanten der Frequenz abhängig vom angelegten Magnetfeld (also der magnetischen Flußdichte). Nur bei ganz bestimmten Frequenzen, abhängig vom angelegten Magnetfeld, werden Energiequanten absorbiert.

Es gilt:

$$\nu = \gamma \cdot B / (2 \cdot \pi) \quad (11)$$

$$\text{Für ein Proton ist } \gamma_p = 2,675 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$$

Für Wasserstoffprotonen sind also nur bei folgenden Magnetfeldern und folgenden Frequenzen Resonanzen möglich:

Magnet. Flußdichte und Resonanz bei Protonen

<i>Magnet. Flußdichte (T)</i>	<i>Resonanzfrequenz (s⁻¹)</i>
0,04930	2.100.000
0,23470	10.000.000
0,46950	20.000.000

Dies sind magnetische Flußdichten, die z.B. Neodymmagnete erzeugen. Es ist wichtig, dass die Probe von einem gleichförmigen Magnetfeld durchflossen wird und das Magnetfeld keine Inhomogenitäten enthält. Sofern diese Magnete eine relativ große Fläche besitzen, sollten diese Permanentmagnete auf Neodymbasis auch für Kernresonanzmessungen einsetzbar sein.

In der Frühzeit der NMR-Spektroskopie wurden ebenfalls Permanentmagnete (ohne zusätzliche Hilfspulen zur Veränderung des Magnetfeldes) eingesetzt.

Neben Wasserstoffprotonen sehr viele andere Atome ebenfalls einen Kernspin.

Bei einem Magnetfeld von 1 Tesla erhält man folgende Resonanzfrequenzen für unterschiedliche Elemente.⁵⁾

<i>Element</i>	<i>Kernspin</i>	<i>Natürliche Häufigkeit (%)</i>	<i>Resonanzfrequenz (MHz)</i>	<i>Magnet. Moment</i>
H ¹	½	99,99	42,58	2,79
H ²	1	0,01	6,53	0,86

<i>Element</i>	<i>Kernspin</i>	<i>Natürliche Häufigkeit (%)</i>	<i>Resonanzfrequenz (MHz)</i>	<i>Magnet. Moment</i>
Li ⁷	3*1/2	92,6	6,26	3,26
Na ²³	3*1/2	100	11,26	2,22
Al ²⁷	5*1/2	100	11,09	3,64
F ¹⁹	5*1/2	100	7,98	2,63
N ¹⁴	1	99,63	3,08	0,4
Mn ⁵⁵	5*1/2	100	10,5	3,44
Co ⁵⁹	7*1/2	100	10,05	3,8
Cu ⁶³	3*1/2	69,1	11,29	2,22
Rh ¹⁰³	1/2	100	1,34	-0,09
Ag ¹⁰⁷	1/2	51,82	1,72	-0,11
I ¹²⁷	5*1/2	100	8,52	2,79
P ³¹	1/2	100	17,24	1,13

Spannungsänderung in einer Spule durch kernmagnetische Spannungsinduktion

Die statische Kernsuszeptibilität kann nach der Langevin-Debyeschen Formel:

$$\chi = N \cdot m^2 / 3 \cdot k \cdot T \text{ oder}$$

$$\chi = N \cdot g_i^2 \cdot \mu_i^2 \cdot I \cdot (I+1) / 3 \cdot k \cdot T \text{ berechnet werden.}$$

(N= Zahl der Kerne in der Probe, g_i (für Wasserstoff) = 2,79 , I=1/2,

μ_i (für Wasserstoff) = 5,05*10⁻²⁷ J/T, k= 1,38*10⁻²³ J/K, T=Temperatur).

1 ml Wasser enthält 1/18 mol Wasser oder N= 6,023*10²³/18 Wassermoleküle.

Für die statische Kernsuszeptibilität für 1 ml Probe beträgt bei 25°C dann:

$$\chi = (6,023 \cdot 10^{23} / 18) \cdot 2,79^2 \cdot (5,05 \cdot 10^{-27}) \cdot (5,05 \cdot 10^{-27}) \cdot 0,5 \cdot 1,5 / (3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 298) =$$

$$\chi = 4,04 \cdot 10^{-10}$$

Dies ist die statische Suszeptibilität von Wasserstoffprotonen.

Im Vergleich zur diamagnetischen Suszeptibilität, die auch noch die Suszeptibilität der Elektronen beinhaltet, ist die Kernsuszeptibilität um den Faktor 10⁴ geringer. Man sieht auch den wichtigen Einfluss durch die Temperatur. Bei geringer Temperatur nimmt die Suszeptibilität deutlich zu.

Die Suszeptibilität χ ist jedoch abhängig von dem anliegenden Magnetfeld im Raum.

In der Mathematik werden bei der Drehung eines Raumvektors um den Winkel ω der x- Koordinate die neue Koordinate:

$$x' = x \cdot \cos \omega - y \cdot \sin \omega, \text{ (x' die Koordinaten von x nach Drehung um } \omega)$$

und für die y-Koordinate die neue Koordinate

$$y' = x \cdot \sin \omega + y \cdot \cos \omega$$

zugeschrieben. (Siehe Schullehrbücher Mathematik, z. B. Heinz Bachmann, *Vektorgeometrie*, Diesterweg Salle, S. 72).

Die Suszeptibilität einer Probe ist abhängig von der Schwingdauer der umwickelten Spule, die

durch die Schwingung ein eigenes Magnetfeld rechtwinklig zum Magnetfeld des

Permanentmagneten erzeugt. Falls genau die passende Frequenz eingestellt wird, bei der die

Kernspins Energie aufnehmen, kommt es zu einer Resonanz, zu einer Änderung des Magnetfeldes,

die im Schwingkreis als Verstimmung sichtbar wird. In einem Schwingkreis verändert sich das

Magnetfeld innerhalb der Probe kontinuierlich mit $\omega \cdot t$.

Für die Suszeptibilität schreibt man daher:

$$\chi = (-\chi' \sin \omega \cdot t + \chi'' \cos \omega \cdot t) .$$

Nun muss man weiterhin beachten, dass die Feldstärke im inneren einer Spule $H = 4 \cdot \pi \cdot I \cdot (n/l)$ ist. (H =Feldstärke, I =Stromstärke, n =Zahl der Windungen, l =Länge der Spule -siehe Lehrbücher der Physik).

Nun ist ferner bekannt, dass die folgende Beziehung zwischen Magnetfeld und Feldstärke:

$$B = \mu_0 \cdot (1 + \chi) \cdot H$$

besteht oder bei Resonanz, wobei die Kernsuszeptibilität das Magnetfeld ändert zu:

$$\Delta B = \chi \cdot H = \chi \cdot 4 \cdot \pi \cdot I .$$

Da das Probensubstanz im Glasröhrchen in der Spule kleiner ist als das Gesamtvolumen des Spuleninneren muss noch ein Füllfaktor ζ berücksichtigt werden. Dieser Füllfaktor ist immer $\zeta < 1$.

Berücksichtigt man, dass der Widerstand der Spule $\omega \cdot L$ und $\Delta U = \Delta R \cdot I$ (s. 2b), ferner $I = I_L \cdot Q$ (Q =Güte des Schwingkreises), dann ergibt sich für die maximale Spannungsänderung in einer Spulenwindung zu:

$$\Delta U = 4 \cdot \pi \cdot \zeta \cdot L_0 \cdot \omega \cdot I_L \cdot Q \cdot (-\chi' \sin \omega \cdot t + \chi'' \cos \omega \cdot t)$$

(siehe auch Lehrbuch von E. R. Andrew, Nuclear Magnetic Resonance).

oder, weil $L_0 = 2 \cdot F \cdot H / I_L$,

$$\Delta U = 8 \cdot \pi \cdot \zeta \cdot \omega \cdot F \cdot H \cdot (-\chi' \sin \omega \cdot t + \chi'' \cos \omega \cdot t) .$$

(wobei F die Fläche der Probesubstanz in der Spule ist und H die Feldstärke).

Nimmt man zur Abschätzung die Werte des Anderson Schwingkreises bei 19 MHz, so ergibt sich

$$\omega = 3.025.500 \text{ s}^{-1}$$

$$L_0 = 0,000001 \text{ H}$$

$$I_L = 0,10 \text{ A}$$

$$Q = 20$$

Setzt man für eine Abschätzung die Werte: $-\chi' \sin \omega \cdot t + \chi'' \cos \omega \cdot t \sim 13 \cdot 10^{-6}$ (siehe 3b) und $\zeta = 0,2$ an, so erhält man für eine maximale Spannungsänderung in der Spule:

$$\Delta U = 4 \cdot 3,14 \cdot 0,2 \cdot 0,000013 \cdot 0,000001 \cdot 3025500 \cdot 0,1 \cdot 20 = 0,0002 \text{ V} \text{ oder } \Delta U = 200 \mu \text{ V} .$$

Mit einer empfindlichen Brückenschaltung sind derartige Spannungsänderungen messbar.

Anhang 1: Suszeptibilität

Lösche gibt für die dynamische Suszeptibilität χ' , χ'' einen Schätzwert von 10^{-5} - 10^{-7} an.^(3b)

χ' ergibt ein reines Absorptionssignal mit deutlichem Peak bei der Resonanzfrequenz.

Die Suszeptibilität χ'' ergibt eine Dispersionskurve. Kurz vor der Resonanzfrequenz gibt es einen Peak nach oben, nach der Resonanzfrequenz gibt es einen Peak nach unten.

Wichtig ist auch die Relaxationszeit T_2 der Kernmagnetischen Substanz. Sie bestimmt die Schärfe des Signalpeaks.

Nur bei einem gleichförmigen Magnetfeld in der Probe können auch gute Signale gemessen werden.

Nach Auflösung der Blochschen Gleichungen ergibt sich (im Spezialfall, wenn keine Spinsättigung erfolgt ist und H_1 relativ klein ist)

$$\chi' = 0,5 \cdot \chi_0 \cdot \omega_0 \cdot T_2 \cdot (\omega_0 - \omega) \cdot T_2 / (1 + (\omega_0 - \omega)^2 \cdot T_2^2)$$

und

$$\chi'' = 0,5 \cdot \chi_0 \cdot \omega_0 \cdot T_2 \cdot 1 / (1 + (\omega_0 - \omega)^2 \cdot T_2^2)$$

Dabei ist

T_2 : die longitudinale Relaxationszeit der kernmagnetischen Substanz (s)

χ_0 : Statische Suszeptibilität, für Wasser bei Raumtemperatur $\chi_0 = 4 \cdot 10^{-10}$

Setzt man versuchsweise folgende Werte für T_2 , χ_0 , ω_0 ein:

T_2 : 0,5 s

χ_0 : $4 \cdot 10^{-10}$

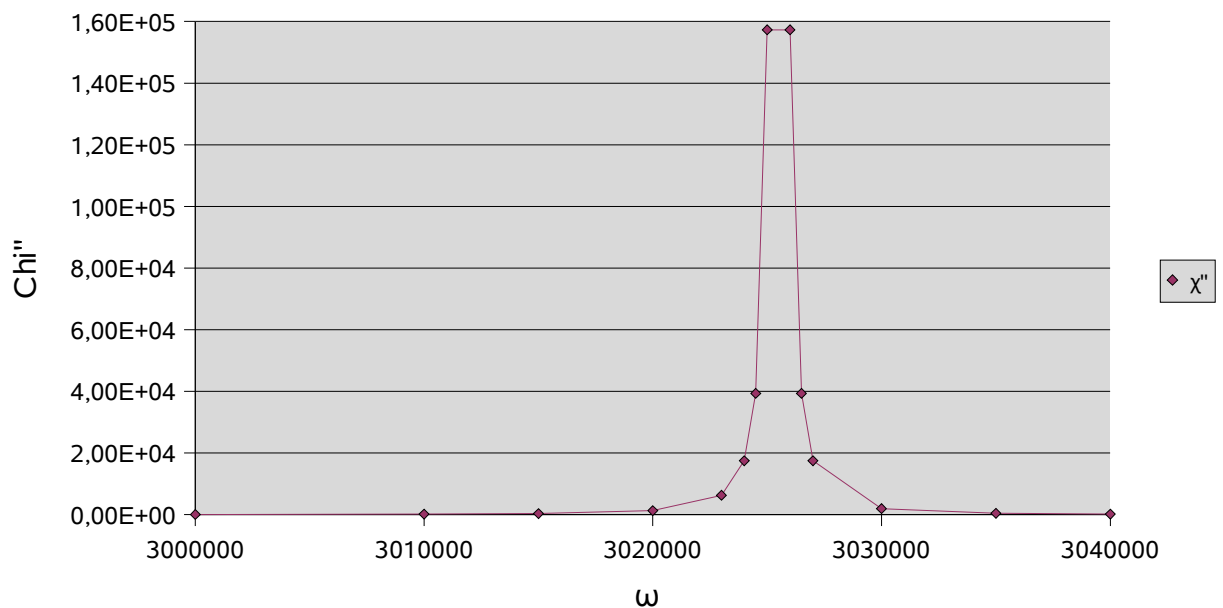
ω_0 : $3.025.500 \text{ s}^{-1}$

Berechnet man dann χ' und χ'' für verschiedene Winkelgeschwindigkeiten in einer Exceltabelle

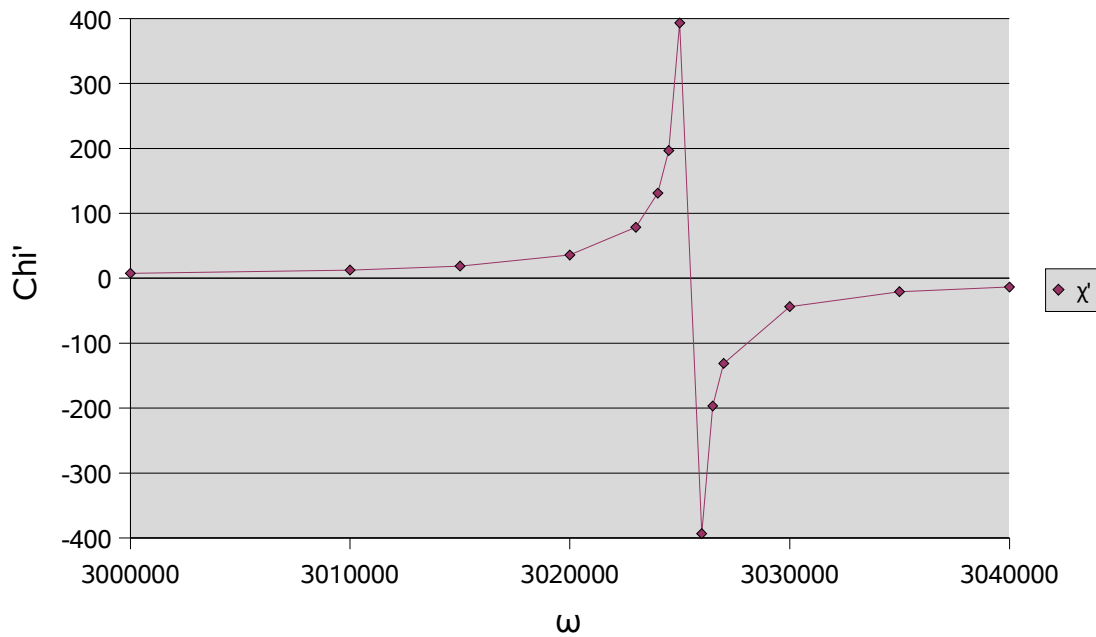
χ''	χ'	ω	ω	$\chi'' \cdot 5 \cdot 10^{11}$	ω	$\chi' \cdot 5 \cdot 10^7$
1,86E-12	2,37E-08	3000000	3000000	0,09	3000000	0,12
2,88E-12	2,95E-08	3005000	3005000	0,14	3005000	0,15
5,04E-12	3,90E-08	3010000	3010000	0,25	3010000	0,2
1,10E-11	5,76E-08	3015000	3015000	0,55	3015000	0,29
4,00E-11	1,10E-07	3020000	3020000	2	3020000	0,55
9,88E-11	1,73E-07	3022000	3022000	4,94	3022000	0,86
5,38E-10	4,03E-07	3024000	3024000	26,89	3024000	2,02
4,84E-09	1,21E-06	3025000	3025000	242,04	3025000	6,05
3,03E-08	3,03E-06	3025300	3025300	1512,71	3025300	15,13
1,20E-05	5,99E-05	3025490	3025490	599108,91	3025490	299,55
1,20E-05	-5,99E-05	3025510	3025510	599108,91	3025510	-299,55
1,00E-07	-5,50E-06	3025610	3025610	5000,41	3025610	-27,5
1,34E-08	-2,02E-06	3025800	3025800	672,33	3025800	-10,08
4,84E-09	-1,21E-06	3026000	3026000	242,04	3026000	-6,05
1,94E-10	-2,42E-07	3028000	3028000	9,68	3028000	-1,21
5,98E-11	-1,34E-07	3030000	3030000	2,99	3030000	-0,67

So erhält man für χ'' ein reines Absorptionssignal, für χ' ein Absorptions-, Desorptionssignal.
Dies gilt jedoch nur, wenn noch keine Sättigung der Spins herrscht.

Resonanz eines Absorptionssignals von Winkelgeschwindigkeit



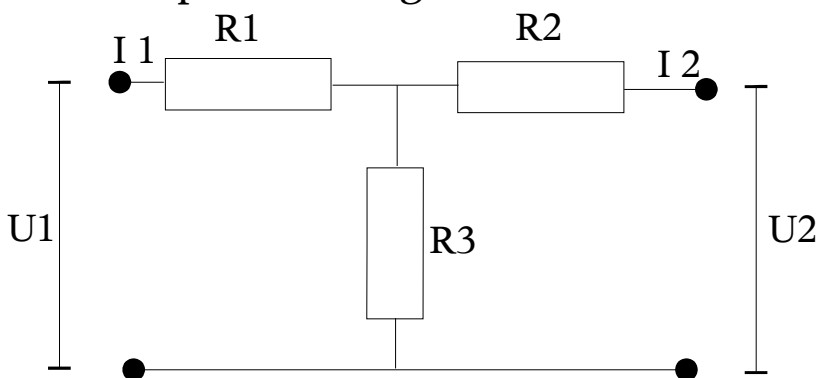
Ein Desorptionssignal in Abhängigkeit von Winkelgeschwindigkeit



Anhang 2: Vierpole

Die Berechnung von Vierpolschaltungen ist nicht ganz trivial. Manfred Albach gibt in seinem Lehrbuch „Grundlagen der Elektrotechnik 3“, Verlag Pearson Studium von Seite 122 ff. eine sehr ausführliche Darstellung über die Grundlagen von Vierpolschaltungen. Im Folgenden kann nur auf wenige Grundlagen der T-Brücke zum besseren Verständnis der Abgleichbedingungen bei der Anderson-Brücke eingegangen werden.

Zweipolschaltung



Eine stromlose Bedingung in der Brücke des T-Zweiges mit R3 wird sich nach diesem Schema kaum realisieren lassen. Werden jedoch statt der einfachen Widerstände Kondensatoren, Spulen, bzw. Parallelschwingkreise eingefügt, werden die Bedingungen komplexer, so dass eine mathematische Beschreibung zum Brückenabgleich aufgestellt werden kann.

Bei der Aufstellung einer sinnvollen Formel muss man gedanklich exakt vorgehen und annehmen, dass die Stromstärke vor und hinter der Brückenverzweigung unterschiedlich sind und je ein

Teilstrom über R3 in den unteren Zweig fließt. Dabei untersucht man jedes Teilsegment, indem man zunächst die Stromstärke $I_2 = 0$ annimmt und die sich ergebenden Widerstände in den Teilzweigen untersucht, sodann $I_1 = 0$ annimmt und wieder die Widerstände der anderen Teilzweige untersucht (siehe M. Albach, „Grundlagen der Elektrotechnik 3“, S. 142).

Für den ersten Teilzweig nimmt man also die Bedingung $I_2 = 0$ an und untersucht den Widerstand der von R1 über R3 in den unteren Zweig fließt. Für in Serie geschaltete Widerstände ergibt sich bekanntlich:

$$U_1 / I_1 |_{I_2=0} = Z_{11} = R_1 + R_3.$$

Nun untersucht man den Widerstand der sich von der Spannung auf der rechten Seite des oberen T-Zweiges ergibt:

$$U_2 / I_1 |_{I_2=0} = Z_{21} = R_3.$$

Ganz analog hält man nun den Strom $I_1 = 0$ und untersucht die Widerstände die sich bei der Schaltung ergeben.

Man erhält:

$$U_1 / I_2 |_{I_1=0} = Z_{12} = R_3$$

und

$$U_2 / I_2 |_{I_1=0} = Z_{22} = R_2 + R_3.$$

Nun ergibt sich (siehe M. Albach, „Grundlagen der Elektrotechnik 3“, S. 150):

$$U_1 = Z_{11} * I_1 + Z_{12} * I_2$$

und

$$U_2 = Z_{21} * I_1 + Z_{22} * I_2.$$

In der Matrixdarstellung schreibt man auch:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} * Z$$

wobei Z die Determinante der obigen Widerstände ist.

Bei bekannten Spannungen U_1 und U_2 kann man I_1 und I_2 nach der Determinantenrechnung berechnen.

So können beispielsweise nach der Eliminationsmethode oder der Multiplikationsmethode die Werte für I_1 und I_2 berechnet werden (siehe 8).

Eliminationsmethode:

$$(U_1 - Z_{12} * I_2) / Z_{11} = I_1$$

$$(U_2 - Z_{22} * I_2) / Z_{21} = I_1$$

$$(U_1 - Z_{12} * I_2) / Z_{11} = (U_2 - Z_{22} * I_2) / Z_{21}$$

$$Z_{21} * U_1 - Z_{12} * Z_{21} * I_2 = Z_{11} * U_2 - Z_{11} * Z_{22} * I_2$$

$$I_2 * (Z_{11} * Z_{22} - Z_{12} * Z_{21}) = Z_{11} * U_2 - Z_{21} * U_1$$

$$I_2 = (Z_{11} * U_2 - Z_{21} * U_1) / (Z_{11} * Z_{22} - Z_{12} * Z_{21}).$$

Nun lässt sich I_2 in die obige Gleichung einfügen, so dass:

$$I_1 = U_1 * (Z_{11} * Z_{22} - Z_{12} * Z_{21}) / (Z_{11} * Z_{22} - Z_{12} * Z_{21}) - (Z_{12} * Z_{11} * U_2 - Z_{12} * Z_{21} * U_1) / Z_{11} * (Z_{11} * Z_{22} - Z_{12} * Z_{21})$$

$$I_1 = (U_1 * Z_{22} - Z_{12} * U_2) / (Z_{11} * Z_{22} - Z_{12} * Z_{21}).$$

Falls die Determinante null wird, wird die Spannung zwischen dem oberen und unteren Zweig null, d.h. es fließt kein Strom über den Widerstand R3 in den unteren Zweig.

Nach der Determinantenrechnung erhält man nun:

$$Z = Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{21} \cdot Z_{12} = (R_1 + R_3) \cdot (R_2 + R_3) - R_3 \cdot R_3 = R_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot (R_2 + R_1) + R_3 \cdot R_3 - R_3 \cdot R_3 = R_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot (R_2 + R_1).$$

Nach Division durch R_3 erhält man:

$$Z/R_3 = R_1 \cdot R_2/R_3 + (R_2 + R_1).$$

Dies ist die Beziehung, die von Lösche und Tuttle zum Brückenabgleich verwendet wurde.

Bei Brückenabgleich ist $Z/R_3 = 0$.

Die Gleichung kann durch Ersatz von R_3 durch Kondensatoren, Spulen, Schwingkreisen null werden.

Literaturquellen

- 1) Herbert Bernstein: *PC-Elektronik Labor*, Franzis Verlag Poing 2004, mit beiliegenden CD's Electronics Workbench
- 2) E. R. Andrew, *Nuclear Magnetic Resonance*, Cambridge at the University Press, 1958, S. 46-48
- 2b) E. R. Andrew, *Nuclear Magnetic Resonance*, Cambridge at the University Press, 1958, S. 33
- 3) A. Lösche, *Kerninduktion*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin (1957), S.
- 3a) A. Lösche, *Kerninduktion*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin (1957), S. 197 ff.
- 3b) A. Lösche, *Kerninduktion*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin (1957), S. 142
- 4) Wikipedia, Stichwort: Magnete.
- 5) CRC Handbook of Chemistry and Physics, 60. Auflage, Boca Raton, Florida 1979,
- 6) Gerd Wedler: *Lehrbuch der physikalischen Chemie*, Verlag Chemie, Weinheim 1982, S. 530, CRC Handbook of Chemistry and Physics, 60. Auflage, Boca Raton, Florida 1979, E-127
- 7) Manfred Albach, „Grundlagen der Elektrotechnik 3“, Pearson Studium, Kapitel 6 Zweitore, S. 122 ff.
- 8) H. G. Zachmann „Mathematik für Chemiker“, 3. Auflage, Verlag Chemie 1977, S. 54